Bayesian Networks - Übungszettel 12

Nicolas Schilling

schilling@ismll.de

January 29, 2014

Abzugeben bis **Dienstag, 04. Februar 18:00**

Exercise 1: Maximum Likelihood Estimation (10 Punkte)

a) Eine Stichprobe der diskreten Zufallsvariable A sei wie folgt gegeben:

$$S = (0, 2, 0, 3, 3, 3, 2, 1, 0, 2, 2, 2, 1, 2, 2, 2, 0, 3, 3, 1)$$

Berechnen Sie die Verteilung anhand des MLE Prinzips für S. Geben Sie hinterher die Likelihood an!

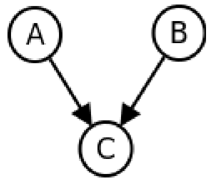
b) Nun betrachten wir folgendes Bayessches Netz:

Dazu sei folgende Stichprobe gegeben:

A	B
1	1
0	0
0	1
1	0
1	1
0	1
1	0
1	1
0	1
1	1

Berechnen Sie die (bedingten) Verteilungen anhand des MLE Prinzips für die gegebene Stichprobe! Geben Sie die maximale Likelihood an!

c) Betrachten Sie nun das folgende Bayessche Netz:



Dazu sei folgende Stichprobe gegeben:

A	B	C
1	1	1
0	0	0
0	1	1
1	0	0
1	1	1
1	0	1
1	0	0
1	1	0
0	1	0
1	1	1
0	0	0
0	1	0
0	1	1
1	1	1
1	0	0
1	1	0

Berechnen Sie die (bedingten) Verteilungen anhand des MLE Prinzips für die gegebene Stichprobe! Geben Sie die maximale Likelihood an!

d) Nennen Sie die Schwächen der Maximum Likelihood Schätzung!

Exercise 2: Maximum A Posterior Estimation (10 Punkte)

a) Für einen fairen sechsseitigen Würfel W nehmen wir a-priori an, dass das Ergebnis gleichverteilt ist, d.h. $P(W = 1) = ... = P(W = 6) = 1/6$. Dazu setzen wir die a-priori Stichprobengröße auf den Wert $n_{\text{prior}} = 10$. Nun sei folgende Stichprobe gegeben:

$$S = (1, 6, 6, 6, 2, 4, 3, 6, 5, 4, 6, 2, 4, 6, 3, 5, 6, 1, 2, 5)$$

Berechnen Sie die kombinierte Wahrscheinlichkeit!

b) Wiederholen Sie den Vorgang mit $n_{\text{prior}} = 1000$. Erklären Sie die Bedeutung von n_{prior}!

c) Betrachten Sie nun eine binäre Zufallsvariable V, dessen a-priori Wahrscheinlichkeitsverteilung durch θ parametrisiert wird. Warum genügt es nicht, nur den Erwartungswert $\hat{\theta}$ zu benutzen, um die a-priori Wahrscheinlichkeitsverteilung zu berechnen? Warum wird eine Verteilung für θ definiert?

d) Erklären Sie, was ein conjugate Prior ist, und warum dieser nützlich ist!

Bonus-Exercise 3: Conjugate Prior für die Poisson Verteilung (10 Punkte)

Sei X eine Poisson-verteilte Zufallsvariable mit Parameter λ mit Dichtefunktion

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k \exp(-\lambda)}{k!} \qquad \mathrm{dom}(X) = \mathbb{N}_0.$$

Dazu sei folgende Stichprobe D gegeben:

$$D = (n_i)_{i=1}^N$$

und die Likelihood der Daten lässt sich durch:

$$P(D \mid \lambda) = \prod_{d \in D} P(d \mid \lambda) = \prod_{i=1}^{N} P(X = n_i)$$

berechnen. Darüber hinaus ist die durch α und β parametrisierte Dichtefunktion der Gamma-Verteilung wie folgt definiert:

$$\mathrm{gamma}(\lambda; \alpha, \beta) = \frac{\beta^\alpha \lambda^{\alpha-1} \exp(-\beta\lambda)}{\Gamma(\alpha)} \quad \alpha, \beta > 0$$

Zeigen Sie, dass die Gamma Verteilung der Conjugate Prior zu einer Poisson-verteilten Stichprobe ist, indem Sie die Posterior-Verteilung $P(D \mid \lambda)P(\lambda)$ berechnen! Berechnen Sie darüber hinaus die Normalisierungskonstante $P(D)$!