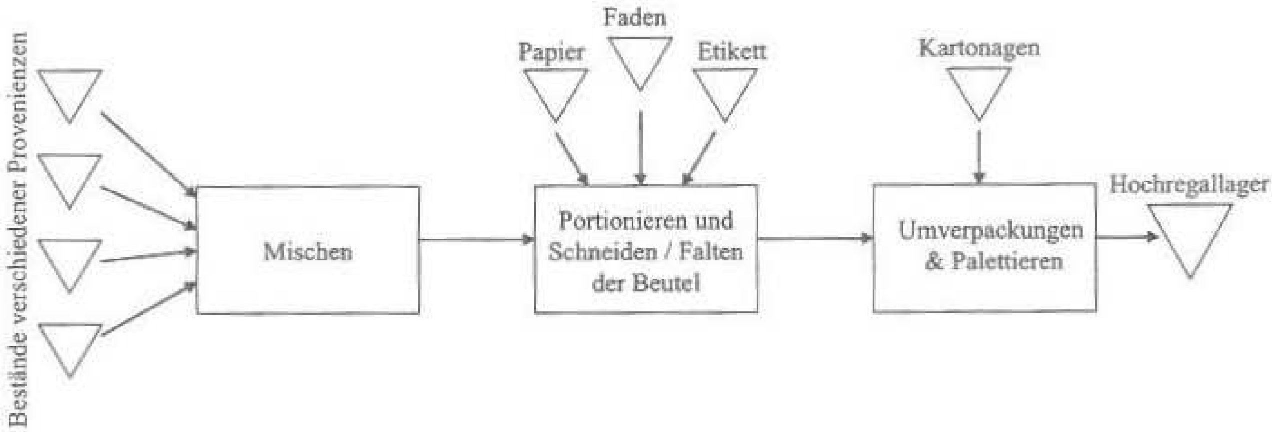
Betriebswirtschaft 1

2. Produktion

Lars Schmidt-Thieme

Wirtschaftsinformatik und Maschinelles Lernen (ISMLL)
Institut für Betriebswirtschaft und Wirtschaftsinformatik
& Institut für Informatik
Universität Hildesheim
http://www.ismll.uni-hildesheim.de

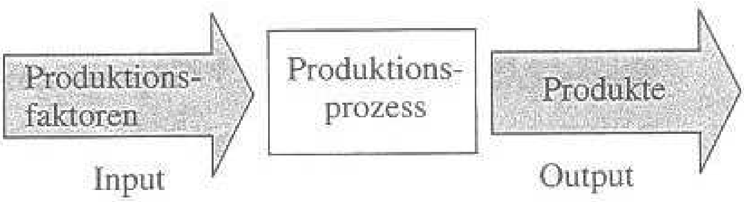
Herstellung von Teebeuteln



[JB06]

Grundbegriffe

Produktion / **Fertigung** / **Leistungserstellung**:
Prozeß zur Erstellung von Gütern, bei dem **Produktionsfaktoren** kombiniert oder transformiert werden.



[DS05]

Produktionstheorie

Produktionstheorie
analysiert und erklärt die mengenmäßigen Beziehungen zwischen Faktorinput und Güteroutput. Entsprechende Modelle heißen **Produktionsfunktionen**.

r_i**:** Einsatzmenge des Faktors $i = 1, \ldots, m$.
Zusammengefaßt als **Faktorvektor**

$$r := (r_1, r_2, \ldots, r_m)$$

x_j**:** Ausbringungsmenge des Produkts $j = 1, \ldots, n$.
Zusammengefaßt als **Produktvektor**

$$x := (x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

Das Paar

$$(-r, x)$$

aus einem Faktorvektor r und einem zugehörigen Produktvektor x heißt **Aktivität** (**Produktionsalternative**).

Die Menge aller Aktivitäten eines Betriebes heißt **Technologie**.

Produktionstheorie / Beispiel

Die Technologie einer Möbelschreinerei:

- drei Arten von Platten: I, II, III.
- drei Arten von Schränken: A, B, C.
- sechs verschiedene Zuschnitte: 1, 2, . . . , 6.

	Produktionsfaktoren			Produkte		
	Platte I	Platte II	Platte III	Schrank A	Schrank B	Schrank C
Aktivität	r_1	r_2	r_3	x_1	x_2	x_3
1	3	2	4	2	1	3
2	2	3	3	2	2	2
3	3	2	3	2	1	2
4	5	3	4	2	3	5
5	3	2	3	2	2	3
6	4	4	4	2	2	3

[DS05]

Effiziente Aktivitäten

Eine Aktivität $(-r, x)$ **dominiert** eine Aktivität $(-r', x')$, falls

1. sie höchstens so viele Faktoren einsetzt:
$$r \leq r',$$
2. sie mindestens so viele Produkte ausbringt:
$$x \geq x' \quad \text{und}$$
3. von mindestens einem Faktor weniger einsetzt
oder von mindestens einem Produkt mehr ausbringt:
$$r_i < r'_i \text{ für ein } i \quad \text{oder} \quad x_j > x'_j \text{ für ein } j$$

Eine Aktivität heißt **effizient**, falls sie von keiner anderen Aktivität dominiert wird.

Effiziente Aktivitäten / Beispiel

Möbelschreinerei:

- drei Arten von Platten: I, II, III.
- drei Arten von Schränken: A, B, C.
- sechs verschiedene Schnitte: 1, 2, . . . , 6.

	Produktionsfaktoren			Produkte		
Aktivität	Platte I	Platte II	Platte III	Schrank A	Schrank B	Schrank C
1	3	2	4	2	1	3
2	2	3	3	2	2	2
3	3	2	3	2	1	2
4	5	3	4	2	3	5
5	3	2	3	2	2	3
6	4	4	4	2	2	3

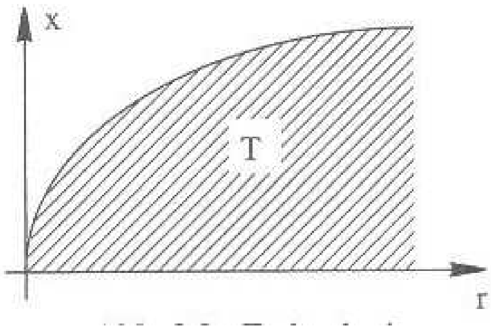
[DS05]

Effiziente Aktivitäten / Beispiel

Einfaches Beispiel:

- ein beliebig teilbarer Faktor r,
- ein Produkt x.

Die effizienten Aktivitäten bilden den Rand der Technologie.



[DS05]

Produkt- und Faktorfunktion

Die Technologie kann allgemein formal als Relation beschrieben werden.

Für den Fall von nur einem Produkt ($n = 1$) kann man die **Produktionsfunktion** bilden, die jeder Faktorvektor r die Menge x des damit effizient (!) erzeugbaren Produktes zuordnet:

$$f : \mathbb{R}_+^m \to \mathbb{R}^+, \quad f(r_1, r_2, \ldots, r_m) = x$$

Die Inverse der Produktfunktion ordnet jeder Menge x eines Produktes die möglichen Faktorvektoren zu, aus denen sie effizient erzeugt werden kann, und heißt **Faktorfunktion**.

Typen von Produktionsfunktionen

Man beschreibt nicht jede Produktionsfunktion einzeln, sondern bildet Typen von ähnlich aufgebauten Produktionsfunktionen,
z.B.

- **limitationale Produktionsfunktionen**:
  — jede Ausbringungsmenge kann nur durch eine eindeutige Faktorkombination hergestellt werden.

- **Cobb-Douglas-Produktionsfunktionen**:
  — partielle Substitutionalität und sinkende Grenzerträge.

- **Gutenberg-Produktionsfunktionen**:
  — explizite Modellierung der Produktionsgeschwindigkeit.

Limitationale Produktionsfunktionen / Eine lineare Technologie

Falls das Verhältnis zwischen den Faktormengen feststeht, spricht man von **limitationalen Produktionsfunktionen.**

Leontief-Produktionsfunktion:

$a_{i,j}$ **Produktionskoeffizient**:
Einsatzmenge von Faktor i zur Produktion von einer ME von Produkt j.

$$r_i = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j$$

$r_i(x)$ beschreibt die Leontief-Produktionsfunktion als Faktorfunktion.

Limitationale Produktionsfunktionen / Eine lineare Technologie / Beispiel

Nur ein Produkt x, Teebeutel:

Produktionsfaktor	Variable	Einsatzmenge a_i je ME
Etikett	r_1	1 Stück
Faden	r_2	14 cm
Papier für Beutel	r_3	34,4 cm^2
Klammern	r_4	2 Stück
Tee	r_5	50g

(nach[JB06])

Leontief-Faktorfunktion: $x =$ Anzahl zu produzierender Teebeutel

$$\begin{aligned} r_1(x) &= x \\ r_2(x) &= 14 \cdot x \\ r_3(x) &= 34,4 \cdot x \\ r_4(x) &= 2 \cdot x \\ r_5(x) &= 50 \cdot x \end{aligned}$$

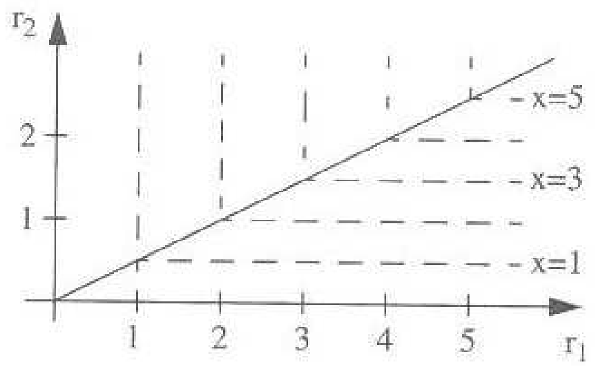
Limitationale Produktionsfunktionen / Eine lineare Technologie / Beispiel 2

Nur ein Produkt x,
nur zwei Faktoren r_1 und r_2,
um ein Produkt herzustellen, braucht man

- 1 ME vom ersten Faktor und
- $\frac{1}{2}$ ME vom zweiten Faktor.

$$\begin{aligned} r_1(x) &= x \\ r_2(x) &= \frac{1}{2} \cdot x \end{aligned}$$

Alle effizienten Aktivitäten liegen auf einer Geraden: [DS05]



Substitutionalität

Zwei Faktoren heißen gegeneinander **substituierbar**, falls die Senkung eines Faktors durch die Erhöhung des anderen Faktors ausgeglichen werden kann, so daß die Ausbringung konstant bleibt.

Zwei Faktoren heißen **partiell substituierbar**, wenn sie in einem gewissen Bereich substituierbar sind, aber von jedem Faktor eine Mindestmenge vorhanden sein muß.

Limitationale Produktionsfunktionen / Kombination mehrerer linearer Technologien

Prozeß I:

Produktionsfaktor	Var.	Einsatzmenge a_i je ME
Etikett	r_1	1 Stück
Faden	r_2	14 cm
Papier für Beutel	r_3	34,4 cm^2
Klammern	r_4	2 Stück
Tee, Sorte 1	r_5	50g
Tee, Sorte 2	r_6	—

Prozeß II:

Produktionsfaktor	Var.	Einsatzmenge a_i je ME
Etikett	r_1	1 Stück
Faden	r_2	14 cm
Papier für Beutel	r_3	34,4 cm^2
Klammern	r_4	2 Stück
Tee, Sorte 1	r_5	—
Tee, Sorte 2	r_6	50g

(nach [JB06])

Limitationale Produktionsfunktionen / Kombination mehrerer linearer Technologien

Mischprozeß:

Produktionsfaktor	Var.	Einsatzmenge a_i je ME
Etikett	r_1	1 Stück
Faden	r_2	14 cm
Papier für Beutel	r_3	34,4 cm^2
Klammern	r_4	2 Stück
Tee, Sorte 1	r_5	10–50g
Tee, Sorte 2	r_6	10–50g

(nach [JB06])

wobei insgesamt 50g Tee im Beutel sein müssen, d.h.

$$10 \le r_5 \le 50$$
$$10 \le r_6 \le 50$$
$$r_5 + r_6 = 50$$

Tee der Sorte 1 und Tee der Sorte 2 sind partiell gegeneinander substituierbar.

Limitationale Produktionsfunktionen / Kombination mehrerer linearer Technologien

Prozeß I: $(4, 1)$ Aufwand pro ME Produkt,
Prozeß II: $(1, 3)$ Aufwand pro ME Produkt.

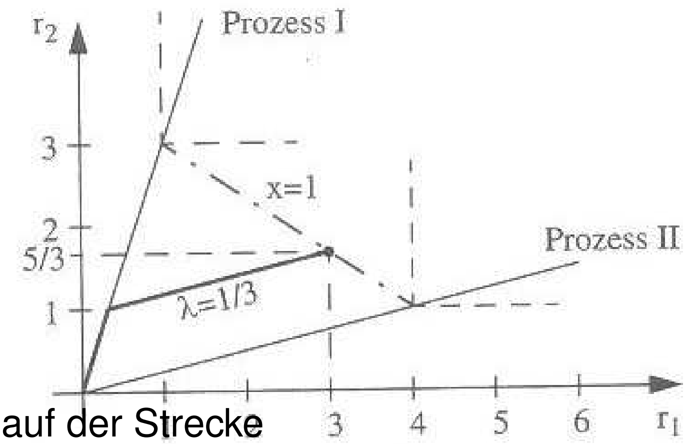
Wenn das Produkt beliebig teilbar ist,
kann zur Herstellung von 1 ME Produkt jede Mischung verwendet werden, mit dem Aufwand:

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} + (1 - \lambda) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

wobei $\lambda \in [0, 1]$.

Für $\lambda = 1$ bekommen wir Prozeß I,
für $\lambda = 0$ bekommen wir Prozeß II.

Limitationale Produktionsfunktionen / Kombination mehrerer linearer Technologien



[DS05]

Die Punkte auf der Strecke

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} + (1-\lambda) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in [0,1]$$

stellen alle effiziente Aktivitäten dar, die die gleiche ME Produkt ausbringen (nämlich 1 ME).

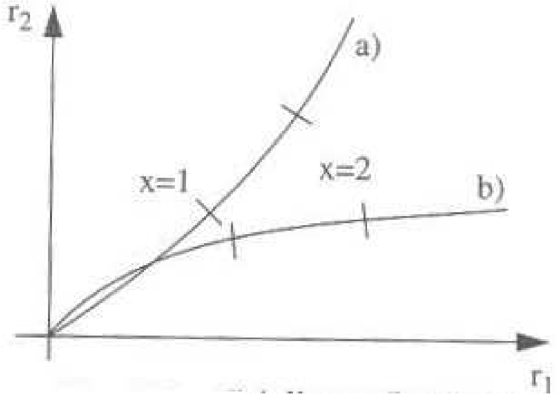
Alle effizienten Aktivitäten, die die gleiche ME x Produkt ausbringen, heißen **Isoquante** (zur Ausbringungsmenge x) (= Höhenlinien des „Ausbringungsgebirges“).

Limitationale Produktionsfunktionen / Nicht-lineare Produktionsfunktionen

Wenn jede ME von Produkten nur durch genau eine Einsatzmenge von Faktoren effizient erzeugt werden kann, sich deren Verhältnis aber bei steigender Ausbringungsmenge ändert, spricht man von **nicht-linearen limitationalen Produktionsfunktionen**.

Beispiel:
steigende Produktionsmengen in einer Schreinerei:

- die ausführende Arbeit r_1 pro ME sinkt,
- die dispositive Arbeit r_2 pro ME steigt.

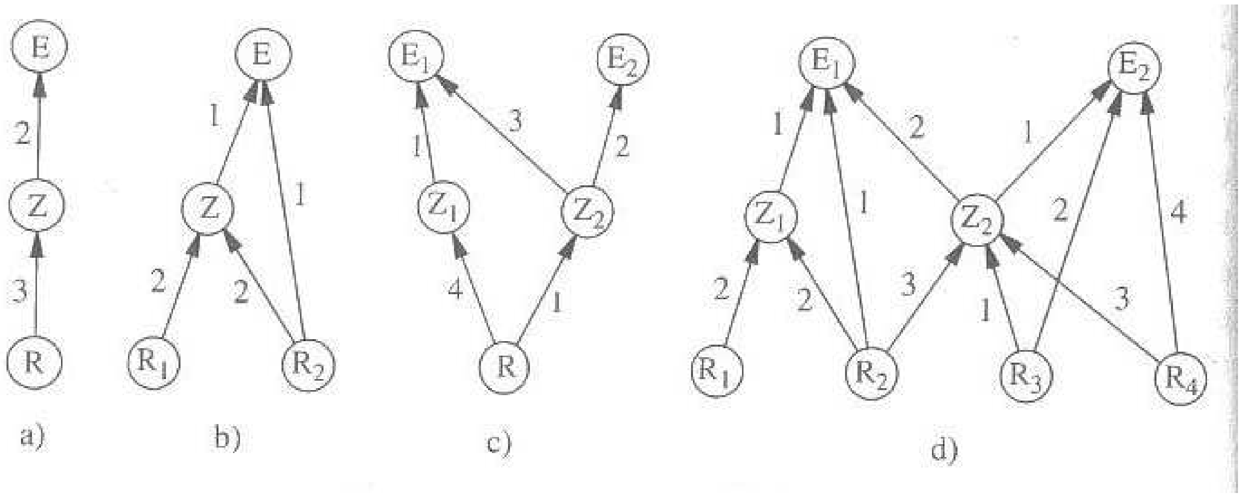


[DS05]

Limitationale Produktionsfunktionen / Mehrstufige lineare Produktionsfunktion

Mehrstufige Leontief-Produktionsfunktionen lassen sich durch **Gozinto-Graphen** beschreiben.

Die Produktionskoeffizienten $a_{i,j}$ jeder Stufe heißen auch **Direktbedarfskoeffizienten**.



[DS05]

Das Ertragsgesetz

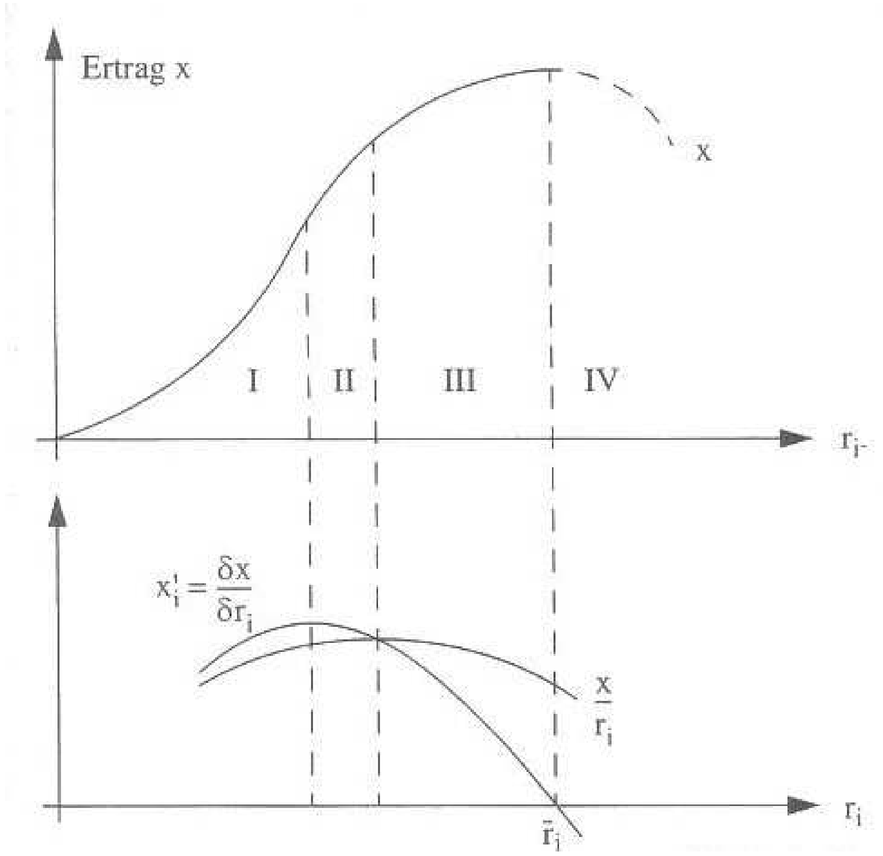
Erstmals beschrieben von Anne Robert Jacques Turgot (1727–1781):

- Erntemenge
- in Abhängigkeit von Menge menschlicher Arbeit (Pflügen, Ernten, etc.)
- bei gleichbleibender Menge anderer Faktoren (Dünger, Saatgut etc.).

Phase	Gesamtertrag	mittlerer Ertrag	Grenzertrag
I	wächst überproportional	wächst	wächst
II	wächst überproportional	wächst	sinkt
III	wächst unterproportional	sinkt	sinkt
IV	sinkt	sinkt	sinkt

Grenzertrag: die partielle Ableitung $\frac{\partial f}{\partial r_i}$.

Das Ertragsgesetz

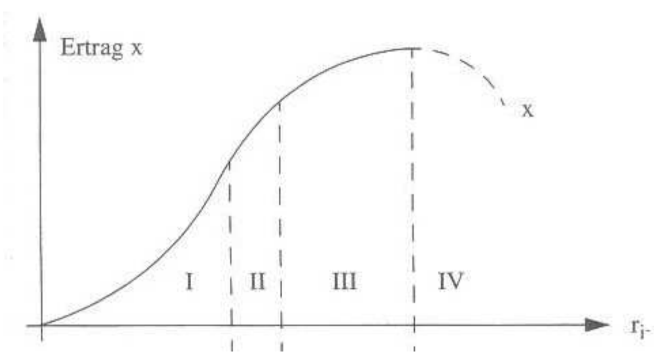


[DS05]

Das Ertragsgesetz

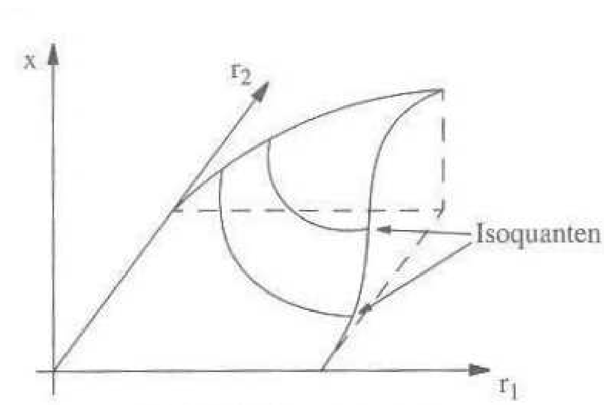
Ein Faktor:

$$x = f(r_1)$$



Zwei (oder mehr) Faktoren:

$$x = f(r_1, r_2)$$



[DS05]

Cobb-Douglas-Produktionsfunktionen

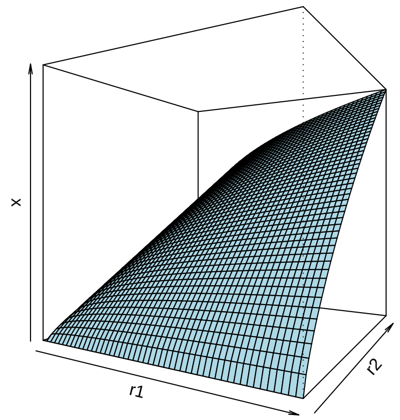
Cobb-Douglas-Produktionsfunktion:

$$x = f(r_1, r_2, \ldots, r_m) = a \cdot r_1^{\alpha_1} \cdot r_2^{\alpha_2} \cdots r_m^{\alpha_m}$$

wobei $a > 0$ und $\alpha_j \in [0, 1]$ für alle Faktoren j.

Beispiel:

$$x = 30 \cdot r_1^{0{,}25} \cdot r_2^{0{,}75}$$



Cobb-Douglas-Produktionsfunktionen / Eigenschaften

1. Cobb-Douglas-Produktionsfunktionen haben sinkende Grenzerträge:

Beweis:

$$\frac{\partial(a \cdot r_1^{\alpha 1} \cdot r_2^{\alpha 2} \cdots r_m^{\alpha m})}{\partial r_j} = a \cdot r_1^{\alpha 1} \cdot r_2^{\alpha 2} \cdots \widehat{r_j^{\alpha_j}} \cdots r_m^{\alpha m} \cdot \alpha_j \cdot r_j^{\alpha_j - 1}$$

sinkt mit wachsendem r_j, da der Exponent $\alpha_j - 1$ negativ ist.

2. Cobb-Douglas-Produktionsfunktionen sind homogen vom Grade $p := \sum_{j=1}^{m} \alpha_j$, d.h.,

$$f(\lambda r_1, \lambda r_2, \ldots, \lambda r_m) = \lambda^p \cdot f(r_1, r_2, \ldots, r_m)$$

Beweis:

$$\begin{aligned} f(\lambda r_1, \lambda r_2, \ldots, \lambda r_m) &= a \cdot (\lambda r_1)^{\alpha_1} \cdot (\lambda r_2)^{\alpha_2} \cdots (\lambda r_m)^{\alpha_m} \\ &= \lambda^{\alpha_1} \lambda^{\alpha_2} \cdots \lambda^{\alpha_m} a \cdot r_1^{\alpha_1} \cdot r_2^{\alpha_2} \cdots r_m^{\alpha_m} \\ &= \lambda^{\sum_{j=1}^{m} \alpha_j} f(r_1, r_2, \ldots, r_m) \end{aligned}$$

Cobb-Douglas-Produktionsfunktionen / Eigenschaften

Beispiele:

- $x = r_1^{3/4} r_2^{1/4}$ — homogen vom Grad 1 / linear homogen: eine Verdoppelung des Inputs verdoppelt den Output.
- $x = r_1 r_2$ — homogen vom Grad 2: eine Verdoppelung des Inputs vervierfacht den Output.
- $x = r_1^{1/4} r_2^{1/4}$ — homogen vom Grad 1/2: eine Verdoppelung des Inputs ver-1,41-facht den Output.

Cobb-Douglas-Produktionsfunktionen / Isoquanten

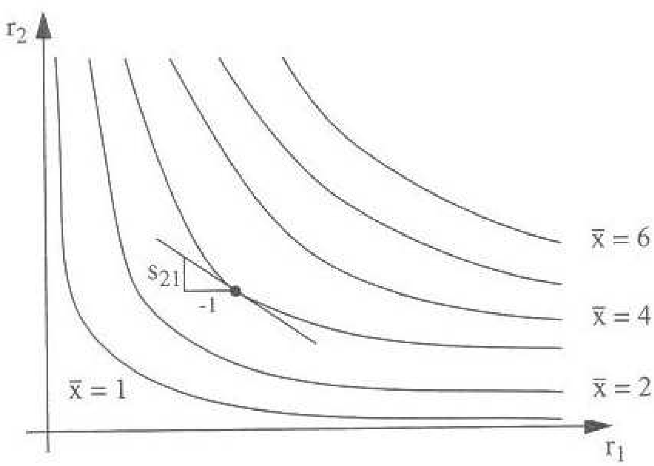
Die Isoquante der Cobb-Douglas-Produktionsfunktion

$$x = a \cdot r_1^{\alpha_1} \cdot r_2^{\alpha_2}$$

zur Ausbringungsmenge x erfüllt die Gleichung

$$r_2 = \left(\frac{x}{r_1^{\alpha_1}}\right)^{\frac{1}{\alpha_2}}$$

ist also keine Strecke mehr!



[DS05]

Gutenberg-Produktionsfunktionen

Betrachten wir nur den Fall eines Produktes x.

Limitationale Produktionsfunktionen arbeiten mit einem konstanten Produktionskoeffizient α_i:

$$r_i = a_i x$$

Für Werkstoffe und Rohstoffe ist dies sinnvoll, nicht gut erklärbar ist Für Betriebsmittel und Betriebsstoffe wird nicht berücksichtigt:

Verbrauch an Betriebsstoffen
(z.B. Benzin, Strom)

Abnutzung von Betriebsmitteln
(z.B. Maschinen)

Man faßt Gruppen von Betriebsmitteln und zugehörigen Betriebsstoffen als **Aggregate** zusammen und beschreibt jedes Aggregat durch eine Faktorfunktion (hier oft **Verbrauchsfunktion**).

Gutenberg-Produktionsfunktionen

Eine Gutenberg-Faktorfunktion für ein Aggregat soll berücksichtigen:

Zustand des Aggregats
z.B. Alter, Grad der Instanthaltung / Wartung.

Produktionsgeschwindigkeit / Intensität d
gemessen in Ausbringungsmenge / Zeiteinheit.

Ausbringungsmenge x

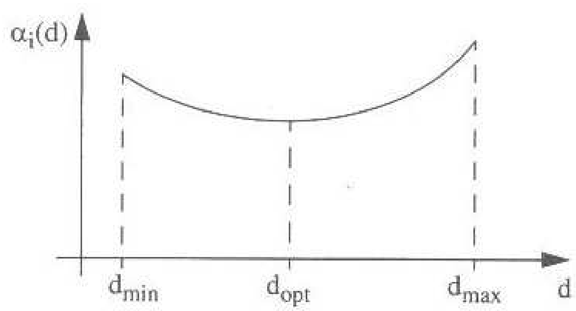
$$x = d \cdot t, \quad \text{mit Produktionszeit } t.$$

Man modelliert deshalb (bei gegebenem Zustand) den Produktionskoeffizient als Funktion der Intensität

$$a_i(d)$$

und erhält so

$$r_i(d, t) = a_i(d) \cdot x = a_i(d) \cdot d \cdot t$$

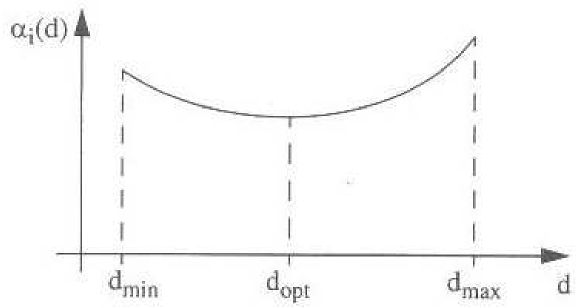


[DS05]

Gutenberg-Produktionsfunktionen / Beispiel

Beispiel Sägemaschine:

- Intensität d = Schnittgeschwindigkeit d in Meter Schnitt / Minute
- Stromverbrauch r_1
- Produktionskoeffizient a_1: Stromverbrauch / Meter Schnitt
  - geringe Schnittgeschwindigkeit:
    hoher Stromverbrauch / Meter Schnitt wegen Leerlauf / Anlassen
  - hohe Schnittgeschwindigkeit:
    hoher Stromverbrauch wegen hoher Geschwindigkeit
  - Betriebsioptimum d_{opt}.



[DS05]

Gutenberg-Produktionsfunktionen / Anpassungen

Ausbringungsmenge bei q Produktiveinheiten (Maschinen; Personen):

$$x = q \cdot d \cdot t$$

quantitative Anpassung
erhöhe oder senke die Anzahl q der Produktiveinheiten

zeitliche Anpassung
erhöhe oder senke die Betriebszeit t
(Zusatzschicht, Überstunden)

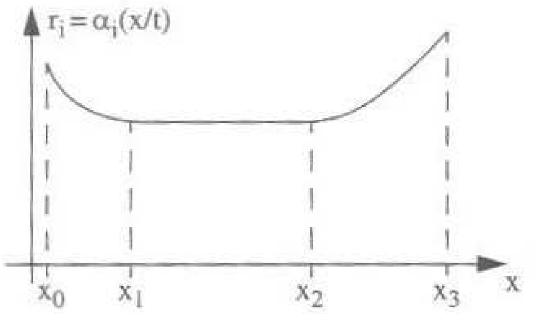
intensitätsmäßige Anpassung
erhöhe oder senke die Produktionsgeschwindigkeit d

Gutenberg-Produktionsfunktionen / Anpassungen

Beliebige Kombinationen sind möglich.

Beispiel: erhöhte Ausbringungsmenge:

1. erhöhe Intensität bis zum Betriebsoptimum
2. erhöhe Betriebszeit bis zur erlaubten Höchstzahl an Überstunden
3. erhöhe Intensität über das Betriebsoptimum hinaus



[DS05]

Grundlagen

Kosten:
mit Preisen bewerteter Verbrauch an Sachgütern und Dienstleistungen:

$$K(x) = \sum_{i=1}^{m} q_i r_i(x)$$

Faktorpreise q_i können auf verschiedene Art angesetzt werden:

- ursprüngliche Beschaffungskosten (pagatorisch)
- Wiederbeschaffungspreise (wertmäßig)
- Opportunitätskosten (entgangener Nutzen)

Grundlagen / Kosteneinflußgrößen

Betriebsgröße
Gesamtheit der Fertigungskapazitäten (Betriebsmittel, Personal)

Produktions-/Fertigungsprogramm
Art und Menge der in einer Periode hergestellten Produkte

Beschäftigung (Ausbringungsmenge x pro Periode)
Beschäftigungsgrad = Ist-Beschäftigung · 100% / Leistungsfähigkeit des Betriebs

- $< 100\%$: Kosten durch Alterung unbenutzter Betriebsmittel
- $> 100\%$: Kosten durch stärkere Abnutzung, Überstunden

Fertigungsablauf

Faktorpreise und Faktorqualitäten

Kurzfristig sind nur Produktionsprogramm und Beschäftigung beeinflußbar.

$\rightsquigarrow$ K(x): Kosten in Abhängigkeit der Ausbringungsmengen.

Grundlagen / Kostenarten

Grob:

Werkstoffkosten

- Wiederbeschaffungspreise
- an Wertentwicklung angepaßte Beschaffungspreise

Betriebsmittelkosten

Abschreibungen: verteile Anschaffungskosten auf Nutzungsdauer.
Zurechnung zu Produkten über zeitliche Inanspruchnahme.

Arbeitskosten

Lohnkosten

Zeitlohn : fester Stundenlohn (GE / h)
Akkordlohn : leistungsbezogener Lohn (GE / Stück)

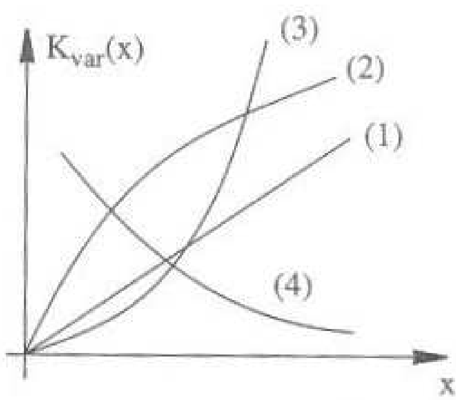
Grundlagen / Fixkosten und Variable Kosten

Kosten bestehen üblicherweise aus zwei Kosten-komponenten

Fixkosten $K_{\textbf{fix}}$
unabhängig von der Beschäftigung x

Variable Kosten $K_{\textbf{var}}(x)$
abhängig von der Beschäftigung x:

1. **proportional** (konstante Stückkosten)
   Kosten für Werkstoffe
2. **degressiv** (sinkende Stückkosten)
   Kosten für Werkstoffe mit Rabatten
3. **progressiv** (steigende Stückkosten)
   knappe Ressourcen, z.B. Kosten für Überstunden
4. **regressiv** (sinkende variable Kosten)
   Heizkosten in einem Kino



[DS05]

Grundlagen / Gesamt-, Stück- und Grenzkosten

Gesamtkosten:

$$K(x) = K_{\text{fix}} + K_{\text{var}}(x)$$

Stückkosten / Durschnittskosten:

$$\bar{K}(x) = \frac{K(x)}{x} = \frac{K_{\text{fix}} + K_{\text{var}}(x)}{x}$$

Variable Stückkosten:

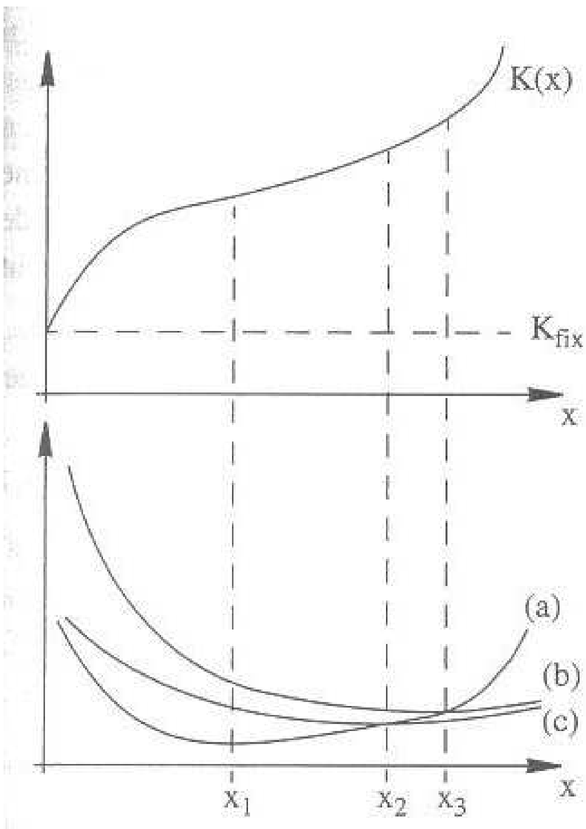
$$\bar{K}_{\text{var}}(x) = \frac{K_{\text{var}}(x)}{x}$$

Grenzkosten:

$$K'(x) = \frac{\partial K(x)}{\partial x}$$

(Mit „Stückkosten“ auf der letzten Folie waren genauer variable Stückkosten gemeint.)

Grundlagen / Gesamt-, Stück- und Grenzkosten

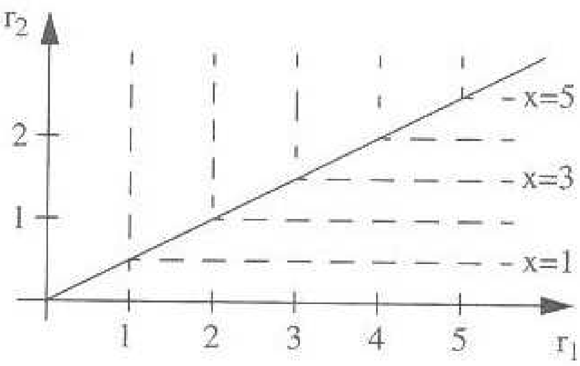


[DS05]

(a) Grenzkosten $K'(x)$, (b) Stückkosten $\bar{K}(x)$, (c) variable Stückkosten $\bar{K}_{\text{var}}(x)$

Kostenfunktion einer Limitationalen Produktionsfunktion

Limitationale Produktionsfunktion:
alle (effizienten) Aktivitäten liegen auf einer Geraden:



[DS05]

Die Kosten folgen der Prozeßgeraden.

Minimalkostenkombination (MKK)

Kosten in Abhängigkeit der Faktoren für proportionale Stückkosten:

$$K(r_1, r_2) = q_1 \cdot r_1 + q_2 \cdot r_2$$

Isokostenlinie zu Kosten K:

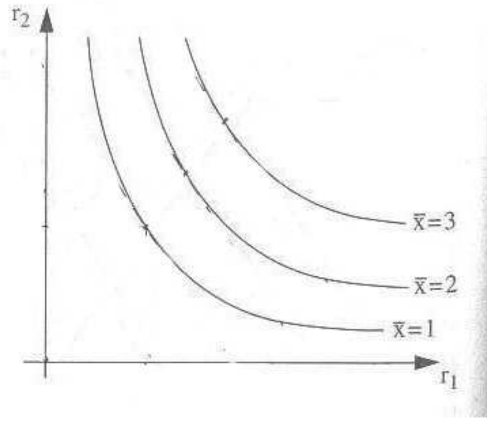
$$r_2 = \frac{K - q_1 \cdot r_1}{q_2}$$

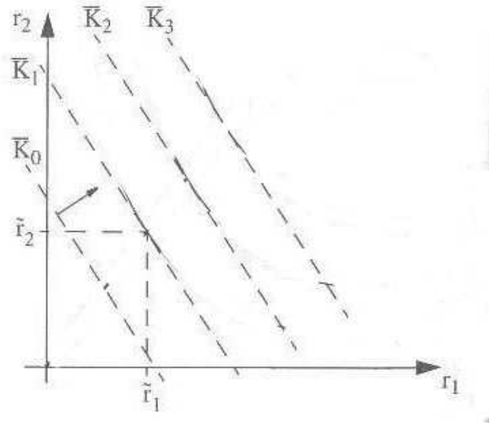
Bei proportionalen Stückkosten sind die Isokostenlinien Strecken.

Minimalkostenkombination der Ausbringungsmenge x:
Faktoren (r_1, r_2) mit

1. festgesetzter Ausbringungsmenge x und
2. minimalen Kosten $K(r_1, r_2)$.

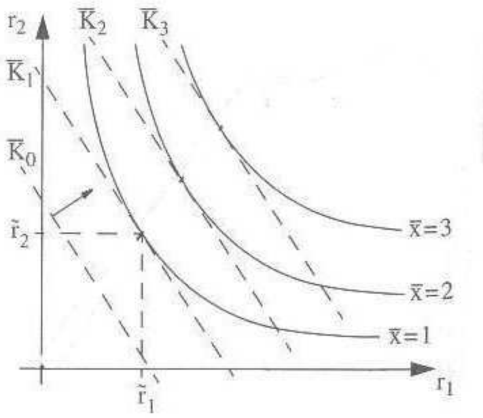
Kostenfunktionen für substitutionale Produktionsfunktionen





Isoquanten

Isokostenlinien



[DS05]

Minimalkostenkombination (MKK)

Bestimmung der Minimalkostenkombination zur Ausbringungsmenge x:

graphisch:

verschiebe die Isokostenlinie parallel,
bis sie die Isoquante zur Ausbringungsmenge x tangiert.

Der Berührpunkt (r_1, r_2) ist die MKK.

rechnerisch:

löse die Gleichung

$$\frac{\frac{\partial x(r_1,r_2)}{\partial r_1}}{\frac{\partial x(r_1,r_2)}{\partial r_2}} = \frac{q_1}{q_2}$$

nach r_1 und r_2.

Minimalkostenkombination (MKK)

Plausibilitätsbetrachtung für die rechnerische Methode:
Die Tangenten müssen übereinstimmen:
Tangentialrichtung der Isokostenlinie

$$r_2 = \frac{K - q_1 \cdot r_1}{q_2}$$

ist

$$\frac{\partial r_2(r_1)}{\partial r_1} = -\frac{q_1}{q_2}$$

Tangentialrichtung der Isoquante:
infinitesimale Verschiebung auf der Isoquante um $(\Delta r_1, \Delta r_2)$:

$$0 = \Delta x = \frac{\partial x(r_1, r_2)}{\partial r_1} \cdot \Delta r_1 + \frac{\partial x(r_1, r_2)}{\partial r_2} \cdot \Delta r_2$$

und daher

$$\frac{\Delta r_2}{\Delta r_1} = \frac{\frac{\partial x(r_1,r_2)}{\partial r_1}}{\frac{\partial x(r_1,r_2)}{\partial r_2}}$$

Minimalkostenkombination (MKK) / Beispiel

Beispiel: Produktionsfunktion und Faktorpreise:

$$x(r_1, r_2) = r_1 \cdot r_2, \quad q_1 = 1, \quad q_2 = 3$$

Die Minimalkostenkombination für die Ausbringungsmenge $x = 1$ erfüllt:

$$\frac{q_1}{q_2} = \frac{\frac{\partial x(r_1,r_2)}{\partial r_1}}{\frac{\partial x(r_1,r_2)}{\partial r_2}} = \frac{r_2}{r_1}$$

und daher

$$r_2 = \frac{q_1}{q_2} \cdot r_1$$

einsetzen in Produktionsfunktion

$$1 \stackrel{!}{=} x(r_1, r_2) = r_1 \cdot \frac{q_1}{q_2} \cdot r_1 = \frac{q_1}{q_2} \cdot r_1^2$$

und daher

$$r_1 = \sqrt{\frac{q_2}{q_1}} = \sqrt{\frac{3}{1}} = \sqrt{3}, \quad r_2 = \frac{q_1}{q_2} \cdot r_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Minimalkostengerade / Expansionslinie

Für homogene Produktionsfunktionen liegen die Minimalkostenkombinationen auf einer Geraden (**Minimalkostengerade / Expansionslinie**).

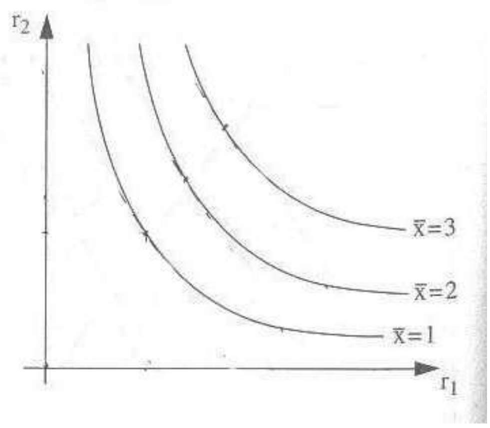
Beweis: Homogene Produktionsfunktion:

$$x(\lambda \cdot r_1, \lambda \cdot r_2) = \lambda^p \cdot x(r_1, r_2)$$

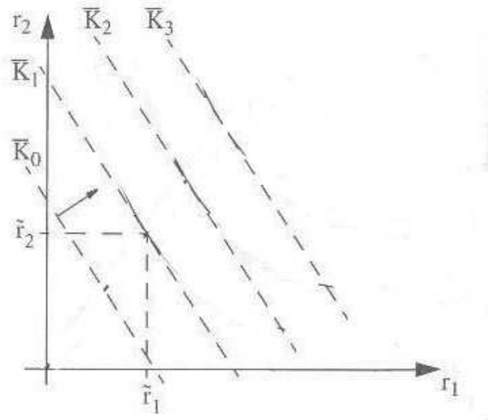
Steigung der Isoquante
zur Ausbringungsmenge $\lambda^p \cdot x$
an der Stelle $(\lambda \cdot r_1, \lambda \cdot r_2)$:

$$\frac{\frac{\partial x(\lambda \cdot r_1, \lambda \cdot r_2)}{\partial r_1}}{\frac{\partial x(\lambda \cdot r_1, \lambda \cdot r_2)}{\partial r_2}} = \frac{\frac{\partial(\lambda^p \cdot x(r_1, r_2))}{\partial r_1}}{\frac{\partial(\lambda^p \cdot x(r_1, r_2))}{\partial r_2}} = \frac{\lambda^p \cdot \frac{\partial x(r_1, r_2)}{\partial r_1}}{\lambda^p \cdot \frac{\partial x(r_1, r_2)}{\partial r_2}} = \frac{\frac{\partial x(r_1, r_2)}{\partial r_1}}{\frac{\partial x(r_1, r_2)}{\partial r_2}}$$

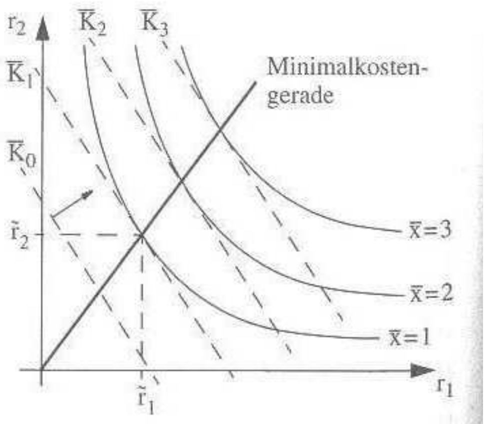
Minimalkostengerade / Expansionslinie



Isoquanten



Isokostenlinien



[DS05]

Minimalkostengerade / Expansionslinie

Die Minimalkostengerade für die Cobb-Douglas-Produktionsfunktion:

$$x(r_1, r_2) = a \cdot r_1^{\alpha_1} \cdot r_2^{\alpha_2}$$

ist

$$r_2 = \frac{q_1 \cdot \alpha_2}{q_2 \cdot \alpha_1} \cdot r_1$$

Beweis:

$$\frac{q_1}{q_2} = \frac{\frac{\partial x(r_1,r_2)}{\partial r_1}}{\frac{\partial x(r_1,r_2)}{\partial r_2}} = \frac{a \cdot \alpha_1 \cdot r_1^{\alpha_1 - 1} \cdot \quad r_2^{\alpha_2}}{a \cdot \quad r_1^{\alpha_1} \quad \cdot \alpha_2 \cdot r_2^{\alpha_2 - 1}} = \frac{\alpha_1 \cdot r_2}{\alpha_2 \cdot r_1}$$

Beispiel:

$$x(r_1, r_2) = r_1 \cdot r_2, \quad q_1 = 1, \quad q_2 = 3$$
$$r_2 = \frac{q_1}{q_2} \cdot r_1 = \frac{1}{3} \cdot r_1$$

Kostenfunktion

Die **Kostenfunktion** $K(x)$ gibt die optimalen Kosten für die Produktion Ausbringungsmenge x an, d.h., wenn die Minimalkostenkombination gewählt wird.

Die Kostenfunktion für homogene Produktionsfunktionen ist

$$K(x) = (q_1 \cdot \tilde{r}_1 + q_2 \cdot \tilde{r}_2) \cdot x^{1/p}$$

mit $(\tilde{r}_1, \tilde{r}_2)$ die Minimalkostenkombination für $x = 1$.

Beweis: Die Kosten für die Ausbringungsmenge $x = 1$ sind

$$K(1) = q_1 \cdot \tilde{r}_1 + q_2 \cdot \tilde{r}_2$$

Für die Ausbringungsmenge x benötigt man die $\lambda = x^{1/p}$-fachen Faktoren:

$$x(\lambda \cdot \tilde{r}_1, \lambda \cdot \tilde{r}_2) = \lambda^p \cdot x(\tilde{r}_1, \tilde{r}_2) = (x^{1/p})^p \cdot 1 = x$$

Kostenfunktion / Beispiel

Beispiel: Produktionsfunktion und Faktorpreise:

$$x(r_1, r_2) = r_1 \cdot r_2, \quad q_1 = 1, \quad q_2 = 3$$

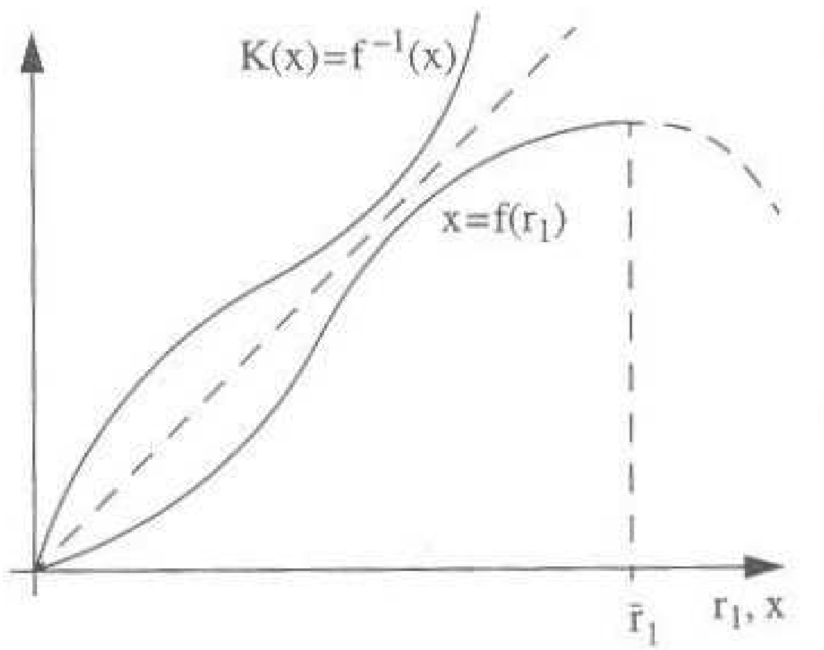
Die Minimalkostenkombination für die Ausbringungsmenge $x = 1$ haben wir bereits berechnet als

$$\tilde{r}_1 = \sqrt{3}, \quad \tilde{r}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Folglich ist die Kostenfunktion

$$\begin{aligned} K(x) = (q_1 \cdot \tilde{r}_1 + q_2 \cdot \tilde{r}_2) \cdot x^{1/p} &= (1 \cdot \sqrt{3} + 3 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}) \cdot \sqrt{x} \\ &= 2 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{x} \end{aligned}$$

Kostenfunktion als Spiegelbild der Produktionsfunktion



[DS05]

1. **Produktionstheorie**

2. **Kostentheorie**

3. **Produktionsplanung**

Produktionsprogrammplanung / Basisszenario

Ausbringungsmengen x_j der Produkte $j = 1, \ldots, n$.
— gesucht.

Variable Kosten k_j für die Herstellung von 1 ME Produkt j.
— konstant, d.h., variable Kosten sind proportional.

Verkaufspreise p_j für den Verkauf von 1 ME Produkt j.
— konstant.

Produktionskoeffizient $a_{i,j}$ für die Produktion von 1 ME Produkt j benötigte Einsatzmenge von Faktor i.

Kapazität κ_i des Faktors i: insgesamt höchstens zur Verfügung stehende Menge von Faktor i.

Variable Kosten und Verkaufspreise kann man auch im **Deckungsbeitrag** d_j zusammenfassen:

$$d_j := p_j - k_j$$

Produktionsprogrammplanung / Basisszenario / Beispiel

- 2 Produkte P_1 und P_2.
  - Deckungsbeiträge 10 GE bzw. 20 GE.
- 3 Faktoren F_1, F_2 und F_3.
  - Kapazität 100, 720 bzw. 60.

Produktionskoeffizienten:

Produkt	Faktoren F_1 $a_{1,j}$	F_2 $a_{2,j}$	F_3 $a_{3,j}$	DB d_j
P_1	1	6	0	10
P_2	1	9	1	20
Kapazität κ_i	100	720	60	

Produktionsprogrammplanung / Basisszenario / Beispiel

Naive Idee:
1. produziere so viele Produkte mit höchstem Deckungsbeitrag (hier: P_2) wie möglich:

- hinsichtlich Faktor F_1: max. $100/1 = 100$ ME Produkt P_2,
- hinsichtlich Faktor F_2: max. $720/9 = 80$ ME Produkt P_2,
- hinsichtlich Faktor F_3: max. $60/1 = 60$ ME Produkt P_2.

$\rightsquigarrow x_2 = 60$.

Dann bleibt übrig:

$$F_1 : 100 - 60 \cdot 1 = 40, \quad F_2 : 720 - 60 \cdot 9 = 180, \quad F_3 : 60 - 60 \cdot 1 = 0$$

Produkt	Faktoren F_1 $a_{1,j}$	F_2 $a_{2,j}$	F_3 $a_{3,j}$	DB d_j
P_1	1	6	0	10
P_2	1	9	1	20
Kapazität κ_i	100	720	60	

Produktionsprogrammplanung / Basisszenario / Beispiel

Naive Idee:
2. produziere aus den Restfaktormengen so viele Produkte mit zweithöchstem Deckungsbeitrag (hier: P_1) wie möglich:

- hinsichtlich Faktor F_1: max. $40/1 = 40$ ME Produkt P_1,
- hinsichtlich Faktor F_2: max. $180/6 = 30$ ME Produkt P_1,
- hinsichtlich Faktor F_3: keine Beschränkung.

$\rightsquigarrow x_1 = 30$.

Dann bleibt übrig:

$$F_1 : 40 - 30 \cdot 1 = 10, \quad F_2 : 180 - 30 \cdot 6 = 0, \quad F_3 : 0$$

	Faktoren			
	F_1	F_2	F_3	DB
Produkt	$a_{1,j}$	$a_{2,j}$	$a_{3,j}$	d_j
P_1	1	6	0	10
P_2	1	9	1	20
Kapazität κ_i	100	720	60	

Produktionsprogrammplanung / Basisszenario / Problemstellung

$$\text{maximiere} \sum_{j=1}^{n} d_j \cdot x_j$$

unter den Nebenbedingungen

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \cdot x_j \leq \kappa_j \text{ für alle } i = 1, \ldots, n$$

$$x_j \geq 0 \text{ für alle } j = 1 \ldots, m$$

Produktionsprogrammplanung / Basisszenario / Problemstellung

$$\text{maximiere } \sum_{j=1}^{n} d_j \cdot x_j$$

unter den Nebenbedingungen

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \cdot x_j \leq \kappa_j \text{ für alle } i = 1, \ldots, n$$

$$x_j \geq 0 \text{ für alle } j = 1 \ldots, m$$

Lineares Optimierungsproblem:

$$\text{max. } \sum_{j=1}^{n} c_j \cdot x_j$$

u.d.Nb.

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \cdot x_j \leq b_i \text{ für alle } i = 1, \ldots, m$$

$$x_j \geq 0 \text{ für alle } j = 1, \ldots, n$$

Matrixschreibweise:

$$\text{max. } \langle c, x \rangle$$

u.d.Nb.

$$Ax \leq b$$

$$x \geq 0$$

Produktionsprogrammplanung / Basisszenario / Problemstellung

maximiere $10 \cdot x_1 + 20 \cdot x_2$

unter den Nebenbedingungen

$$x_1 + x_2 \leq 100$$

$$6 \cdot x_1 + 9 \cdot x_2 \leq 720$$

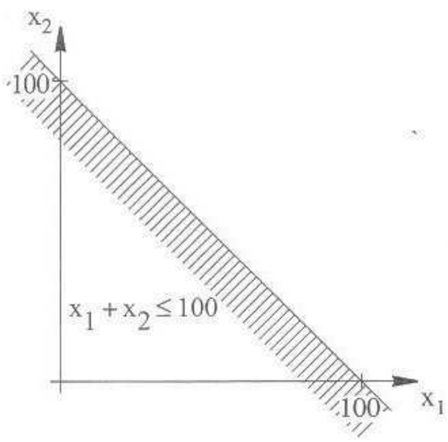
$$x_2 \leq 60$$

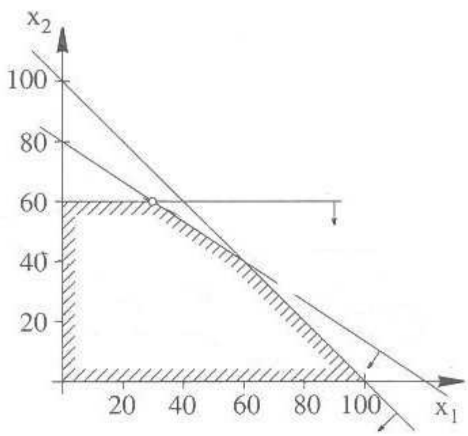
$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

	Faktoren			
	F$_1$	F$_2$	F$_3$	DB
Produkt	$a_{1,j}$	$a_{2,j}$	$a_{3,j}$	d_j
P$_1$	1	6	0	10
P$_2$	1	9	1	20
Kapazität κ_i	100	720	60	

Zulässiger Bereich:

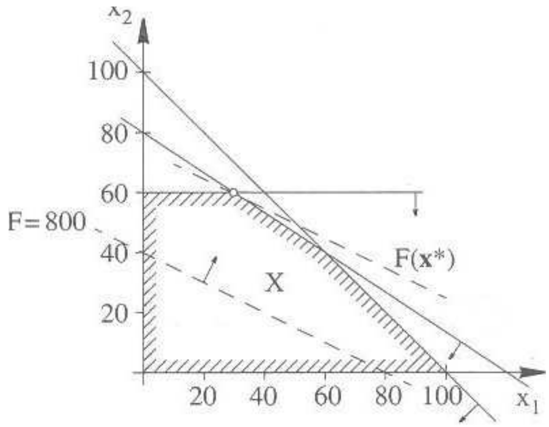




[DD07]

Produktionsprogrammplanung / Graphische Lösungsmethode

1. zeichne alle Nebenbedingungs-Geraden.
2. markiere den zulässigen Bereich
   (= der Schnitt aller (durch je eine Nebenbedingungs-Gerade definierter) zulässiger Halbräume).
3. zeichne eine Isogewinn-Linie.
4. verschiebe die Isogewinn-Linie parallel in Richtung wachsender Gewinne, bis sie den Rand des zulässigen Bereichs berührt.
   Der Berührpunkt ist das Optimum.



[DD07]

Produktionsprozeßplanung / Ersatzziele

Eigentliches Ziel: Kosten minimieren, z.B.

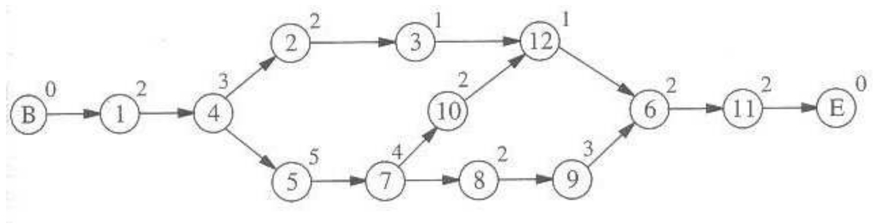
- **Fertigungskosten:** Kosten der Potentialfaktoren.
- **Leerkosten** für den Stillstand von Potentialfaktoren.
- **Lagerhaltungskosten** für die Lagerung von Vor-, Zwischen- und Endprodukten.
- **Strafkosten** für verspätete oder ausgebliebene Lieferungen.

Da diese Kosten oft schwer zu schätzen sind, **Ersatzziele**:

- Minimiere die **Durchlaufzeit eines Auftrages**.
- Minimiere die Durchlaufzeit eines Auftragsbündels (Zykluszeit).
- Minimiere die **Leerzeit eines Potentialfaktors**.
- Minimiere die **Verspätung eines Auftrags**.

Produktionsprozeßplanung / Strukturplanung

Vorgang	Beschreibung	Vorgänger	Dauer
1	Fundamente ausheben	—	2
2	Abwasserrohre verlegen	4	2
3	elektrische Erdleitungen verlegen	2	1
4	Bodenplatte gießen	1	3
5	Mauern errichten	4	5
6	Verputzen	9, 12	2
7	Decke betonieren	5	4
8	Fenster und Türen einsetzen	7	2
9	Dach decken	8	3
10	elektrische Leitungen legen	7	2
11	Maschinen aufstellen	6	2
12	Steckdosen setzen	3,10	1



[DS05]

Produktionsprozeßplanung / Zeitplanung

Gegeben:

V_i Menge der direkten Vorgänger von Vorgang i.

N_i Menge der direkten Nachfolger von Vorgang i.

t_i Dauer von Vorgang i.

Gesucht:

FA$_i$, **FE**$_i$ frühestmöglicher Anfangs- bzw. Endzeitpunkt für Vorgang i.

SA$_i$, **SE**$_i$ spätestmöglicher Anfangs- bzw. Endzeitpunkt für Vorgang i.

T kürzeste Gesamtprojektlaufzeit.

Produktionsprozeßplanung / Zeitplanung

Vorwärtsrechnung:

Berechne für jeden Vorgang i:

$$\mathsf{FA}_i := \max\{\mathsf{FE}_j \mid j \in V_i\}$$
$$\mathsf{FE}_i := \mathsf{FA}_i + t_i$$

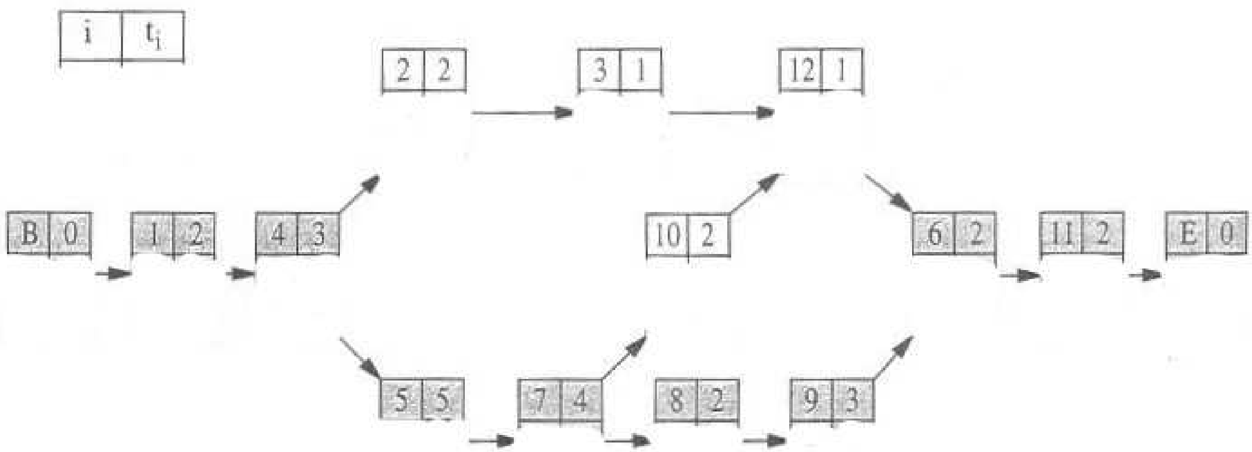
Dabei müssen die Vorgänge so durchlaufen werden, daß man einen Vorgang erst besucht, wenn alle seine Vorgänger bereits besucht worden sind (topologische Sortierung).

Rückwärtsrechnung:

Berechne für jeden Vorgang i:

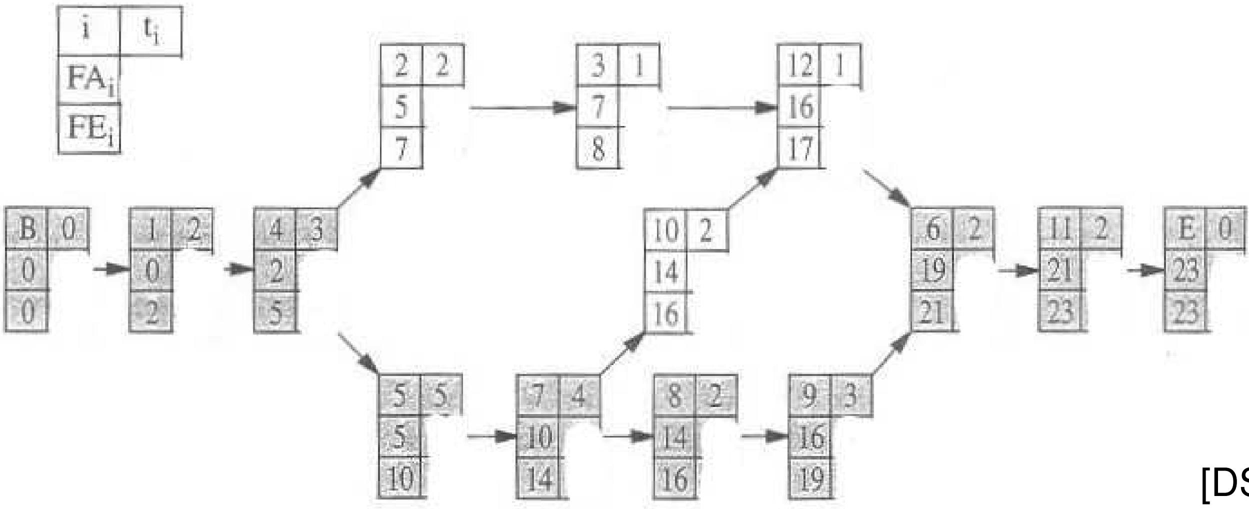
$$\mathsf{SE}_i := \min\{\mathsf{SA}_j \mid j \in N_i\}$$
$$\mathsf{SA}_i := \mathsf{SE}_i - t_i$$

Produktionsprozeßplanung / Zeitplanung / Beispiel



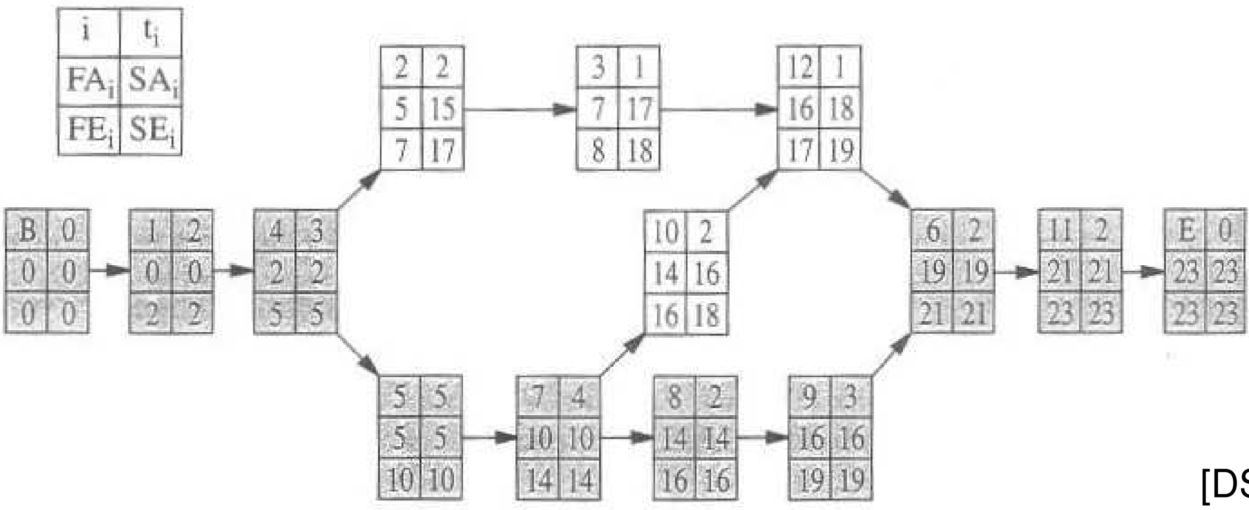
[DS05]

Produktionsprozeßplanung / Zeitplanung / Beispiel



[DS05]

Produktionsprozeßplanung / Zeitplanung / Beispiel



[DS05]

Produktionsprozeßplanung / Zeitplanung

Gesamte Pufferzeit eines Vorgangs i:

$$\text{GP}_i := \text{SA}_i - \text{FA}_i$$

Maximale Verzögerungsdauer, ohne daß die Gesamtprojektdauer verlängert werden muß.
Vorgang i heißt **kritisch**, falls $\text{GP}_i = 0$.

Freie Pufferzeit eines Vorgangs i:

$$\text{FP}_i := \min\{\text{FA}_j \,|\, j \in N_i\} - \text{FE}_i$$

Maximale Verzögerungsdauer, so daß trotzdem alle Nachfolge-Vorgänge frühestmöglich beginnen können.

Unabhängige Pufferzeit eines Vorgangs i:

$$\text{UP}_i := \max\{0, \min\{\text{FA}_j \,|\, j \in N_i\} - \max\{\text{SE}_j \,|\, j \in V_i\} - t_i\}$$

Maximale Verzögerungsdauer bei spätestem Ende alle Vorgänger-Vorgänge, so daß alle Nachfolge-Vorgänge frühestmöglich beginnen können.

$$\text{GP}_i \geq \text{FP}_i \geq \text{UP}_i$$

Produktionsprozeßplanung / Zeitplanung

Bei enger Planung wie der Vorwärts-/Rückwärtsrechnung, ist die freie Pufferzeit (und die unabhängige Pufferzeit) immer 0.

Die kritischen Vorgänge bilden einen oder mehrere Pfade vom Beginn zum Ende des Projekts (**kritischer Pfad**; **critical path method**).

Jede Verzögerung eines Vorgangs auf dem kritischen Pfad verzögert die Gesamtprojektlaufzeit.

Literatur

[DD07] Wolfgang Domschke and Andreas Drexl. *Einführung in Operations Research*. Springer, 7 edition, 2007.

[DS05] Wolfgang Domschke and Armin Scholl. *Grundlagen der Betriebswirtschaftslehre — Eine Einführung aus entscheidungsorientierter Sicht*. Springer, 2 edition, 2005.

[JB06] Hermann Jahnke and Dirk Biskup. *Einführung in die Betriebswirtschaftslehre*, chapter Produktion. Springer, 2006.