FFT – Beispiel (Folie 39 in imageanalysis-04-fourier-transform.pdf)

Gegeben ist folgende endliche, diskrete Funktion:

f(0) = 5,   f(1) = 9,   f(2) = 6,   f(3) = 4,   f(4) = 2,   f(5) = -1,   f(6) = 2,   f(7) = -3

Wir möchten die Fourier Transformierte mit FFT berechnen.

Das ist eine reelle Funktion → die Immaginärteile sind 0. Also die Funktion sieht so aus, wenn man sie als eine komplexe Funktion darstellt:

f(0) = 5 + 0 i,   f(1) = 9 + 0 i,   f(2) = 6 + 0 i, …

Das Input des FFT-Algorithmus besteht aus Paaren. Ein Paar ist das reelle und das immaginäre Teil eines Funktionswertes. Also das Input des FFT-Algorithmus:

(5,0), (9,0), (6,0), (4,0), (2,0), (-1,0), (2,0), (-3,0)

Der Verlauf des Algorithmus ist in der Tabelle unten dargestellt. Die Return-Pointers geben an, wo man die Ausführung nach einem Return-Befehl fortsetzen soll. Solange es keine Rekursionen gibt, heißt ein Return natürlich, dass man fertig ist, und das Ergebnis dem Benutzer gezeigt werden soll (ERGEBNIS). Der Algorithmus ruft aber sich selbst rekursiv auf. Dann gibt der Return-Pointer an, wo man die Ausführung nach dem Ende des Rekursiven Aufrufes fortsetzen soll. Da aber die Rekursionen in einander geschachtelt werden können, hat man eigentlich nicht nur ein Return-Pointer, sonder eine Liste von denen.

Nr.	Schritt (gem. Folie)	Was passiert?	Return-Pointers (wegen Rekursionen)
1	1	fft(5,0), (9,0), (6,0), (4,0), (2,0), (-1,0), (2,0), (-3,0))	ERGEBNIS
2	2	N = 8	ERGEBNIS
3	3	If N is even → true	ERGEBNIS
4	4	F = ((0,0), (0,0), (0,0), (0,0), (0,0), (0,0), (0,0), (0,0))	ERGEBNIS
5	5	A = fft((5,0), (6,0), (2,0), (2,0))	ERGEBNIS
6	1	**[Rekursiver Aufruf]** fft((5,0), (6,0), (2,0), (2,0))	6, ERGEBNIS
7	2	N‘ = 4	6, ERGEBNIS
8	3	If N‘ is even → true	6, ERGEBNIS
9	4	F‘ = ((0,0), (0,0), (0,0), (0,0))	6, ERGEBNIS
10	5	A‘ = fft((5,0), (2,0))	6, ERGEBNIS
11	1	**[Rekursiver Aufruf]** fft((5,0), (2,0))	6, 6, ERGEBNIS
12	2	N‘‘ = 2	6, 6, ERGEBNIS
13	3	If N‘‘ is even → true	6, 6, ERGEBNIS
14	4	F‘‘ = ((0,0), (0,0))	6, 6, ERGEBNIS
15	5	A‘‘ = fft((5,0))	6, 6, ERGEBNIS
16	1	**[Rekursiver Aufruf]** fft((5,0))	6, 6, 6, ERGEBNIS
17	2	N‘‘‘ = 1	6, 6, 6, ERGEBNIS
18	3	If N‘‘ is even → false	6, 6, 6, ERGEBNIS
19	15	dft-naive-cached((5,0))	6, 6, 6, ERGEBNIS
20	1	**[Funktionsaufruf]** dft-naive-cached((5,0))	16, 6, 6, 6, ERGEBNIS
21	2	N_4 = length(f) = 1	16, 6, 6, 6, ERGEBNIS
22	3	for omega := 0…0 [wegen N_4=1]	16, 6, 6, 6, ERGEBNIS
23	4	**[Schleifenausführung für omega=0]** C(0) = cos(0) = 1	16, 6, 6, 6, ERGEBNIS
24	5	S(0) = sin(0) = 0	16, 6, 6, 6, ERGEBNIS
25	6	**[Ende der Schleifenausführung vom 22/3]**	16, 6, 6, 6, ERGEBNIS
26	7	F_4 := ((0,0))	16, 6, 6, 6, ERGEBNIS

27	8	for omega := 0…0 [wegen N_4=1]	16, 6, 6, 6, ERGEBNIS
28	9	**[Schleifenausführung für omega=0]** c=(c0,c1)=(0,0)	16, 6, 6, 6, ERGEBNIS
29	10	For x := 0…0 [wegen N4=1]	16, 6, 6, 6, ERGEBNIS
30	11	**[Schleifenausführung für x=0]** c0 = c0 + 5C(0) + 0S(0) → c0 = 5	16, 6, 6, 6, ERGEBNIS
31	12	c1 = c1 – 5S(0) + 0C(0) → c1 = 0	16, 6, 6, 6, ERGEBNIS
32	13	**[Ende der Schleifenausführung vom 29/11]**	16, 6, 6, 6, ERGEBNIS
33	14, 15, 16	F(omega) = (5/sqrt(N_4), 0/sqrt(N_4)) → F(0) = (5,0)	16, 6, 6, 6, ERGEBNIS
34	17	**[Ende der Schleifenausführung vom 27/8]**	16, 6, 6, 6, ERGEBNIS
35	18	**Return ((5,0))** [zurück zum 16-ten Schritt von fft((5,0))]	16, 6,6,6, ERGEBNIS
36	16, 17	**Return ((5,0))** [zurück zum 6-ten Schritt von fft((5,0), (2,0))]	6, 6, 6, ERGEBNIS
37	6	B‘‘ = fft((2,0))	6, 6, ERGEBNIS
38	1	**[Rekursiver Aufruf]** fft((2,0))	7, 6, 6, ERGEBNIS
39	2	N_5 = 1	7, 6, 6, ERGEBNIS
40	3, 15	If N_5 is even → false; dft-naive-cached((2,0))	7, 6, 6, ERGEBNIS
41	1	**[Funktionsaufruf]** dft-naive-cached((2,0))	16, 7, 6, 6, ERGEBNIS
42	2-18	Funktionsausführung von dft-naive-cached((2,0)) vom Prinzip her gleich, wie vorher. Ergebnis: F(0)=(2,0) **Return ((2,0))** [zurück zum 16-ten Schritt von fft((2,0))]	16, 7, 6, 6, ERGEBNIS
43	16,17	**Return ((2,0))** [zurück zum 7-ten Schritt von fft((5,0), (2,0))] [A‘‘ = ((5, 0)), B‘‘= ((2,0))]	7, 6, 6, ERGEBNIS
44	7	For omega := 0…1 (N‘‘ = 2)	6, 6, ERGEBNIS
45	8, 9	**[Schleifenausführung für omega=0]** a = A(0) = (5, 0), b = B(0) = (2, 0)	6, 6, ERGEBNIS
46	10	F(0)$_0$ = 5 + cos(0) 2 + sin(0) 0 = 7 F(0)$_0$:= F(0)$_0$ / WURZEL(2) → F(0)$_0$ = 7 / WURZEL (2)	6, 6, ERGEBNIS
47	11	F(0)$_1$ = 0 + cos(0) 0 - sin(0) 2 = 0 F(0)$_1$:= F(0)$_1$ / WURZEL(2) → F(0)$_1$ = 0	6, 6, ERGEBNIS
48	8, 9	**[Schleifenausführung für omega=1]** a = A(0) = (5, 0), b = B(0) = (2, 0)	6, 6, ERGEBNIS
49	10	F(1)$_0$ = 5 + cos(PI) 2 + sin(PI) 0 = 3 F(1)$_0$:= F(1)$_0$ / WURZEL(2) → F(1)$_0$ = 3 / WURZEL (2)	6, 6, ERGEBNIS
50	11	F(1)$_1$ = 0 + cos(PI) 0 - sin(PI) 2 = 0 F(1)$_1$:= F(1)$_1$ / WURZEL(2) → F(1)$_1$ = 0	6, 6, ERGEBNIS
51	12	**[Ende der Schleifenausführung vom 44/7]**	6, 6, ERGEBNIS
52	13	**Return ((7/WURZEL(2),0), (3/WURZEL(2),0))** [zurück zum 6-ten Schritt von fft((5,0), (6,0), (2,0), (2,0))]	6, 6, ERGEBNIS
53	6	B‘ = fft((6,0), (2,0))	6, ERGEBNIS
54	1	**[Rekursiver Aufruf]** fft((6,0), (2,0))	7, 6, ERGEBNIS
55	2	N_6 = 2	7, 6, ERGEBNIS
56	3, 4, 5, 6	F_6 = ((0,0), (0,0)), A_6 = fft((6,0)), B_6 = fft((2,0)) **Rekursive Aufrufe von fft,** wie vorher (Nr. 15 – 36 bzw. Nr. 37 – 43) Ergebnise: A_6 = ((6,0)), B_6 = ((2,0))	7, 6, ERGEBNIS
57	7-13	Wie vorher (Nr. 44 – 52) **Return ((8/WURZEL(2),0), (4/WURZEL(2),0))** [zurück zum 7-ten Schritt von	7, 6, ERGEBNIS

		fft((5,0), (6,0), (2,0), (2,0))] [A‘ = ((7/WURZEL(2),0), (3/WURZEL(2),0)), B‘ = ((8/WURZEL(2),0), (4/WURZEL(2),0))]	
58	7	For omega := 0…3 do [wegen N‘ = 4]	6, ERGEBNIS
59	8,9	**[Schleifenausführung für omega=0]** a = A(0) = (7/WURZEL(2),0), b=B(0)=(8/WURZEL(2),0)	6, ERGEBNIS
60	10	$F(0)_0$ = 7/WURZEL(2) + cos(0) 8/WURZEL(2) + sin(0) 0 = = 15/WURZEL(2) $F(0)_0$:= $F(0)_0$ / WURZEL(2) → $F(0)_0$ = 15/2 = 7.5	6, ERGEBNIS
61	11	$F(0)_1$ = 0 + cos(0) 0 - sin(0) 8/WURZEL(2) = 0 $F(0)_1$:= $F(0)_1$ / WURZEL(2) → $F(0)_1$ = 0	6, ERGEBNIS
62	8,9	**[Schleifenausführung für omega=1]** a = A(1) = (3/WURZEL(2),0), b=B(1)=(4/WURZEL(2),0)	6, ERGEBNIS
63	10	$F(1)_0$ = 3/WURZEL(2) + + cos(0.5 PI) 4/WURZEL(2) + sin(0.5 PI) 0 = = 3/WURZEL(2) $F(1)_0$:= $F(1)_0$ / WURZEL(2) → $F(1)_0$ = 3 / 2 = 1.5	6, ERGEBNIS
64	11	$F(1)_1$ = 0 + cos(0.5 PI) 0 - sin(0.5 PI) 4/WURZEL(2) = = -4/WURZEL(2) $F(1)_1$:= $F(1)_1$ / WURZEL(2) → $F(1)_1$ = -4 / 2 = -2	6, ERGEBNIS
65	8,9	**[Schleifenausführung für omega=2]** a = A(0) = (7/WURZEL(2),0), b=B(0) = (8/WURZEL(2),0)	6, ERGEBNIS
66	10	$F(2)_0$ = 7/WURZEL(2) + cos(PI) 8/WURZEL(2) + sin(PI) 0 = = -1/WURZEL(2) $F(2)_0$:= $F(2)_0$ / WURZEL(2) → $F(2)_0$ = -1/2 = -0.5	6, ERGEBNIS
67	11	$F(2)_1$ = 0 + cos(PI) 0 - sin(PI) 8/WURZEL(2) = 0 $F(2)_1$:= $F(2)_1$ / WURZEL(2) → $F(2)_1$ = 0	6, ERGEBNIS
68	8,9	**[Schleifenausführung für omega=3]** a = A(1) = (3/WURZEL(2),0), b=B(1)=(4/WURZEL(2),0)	6, ERGEBNIS
69	10	$F(3)_0$ = 3/WURZEL(2) + + cos(1.5 PI) 4/WURZEL(2) + sin(1.5 PI) 0 = = 3/WURZEL(2) $F(3)_0$:= $F(3)_0$ / WURZEL(2) → $F(3)_0$ = 3/2 = 1.5	6, ERGEBNIS
70	11	$F(3)_1$ = 0 + cos(1.5 PI) 0 - sin(1.5 PI) 4/WURZEL(2) = = 4/WURZEL(2) $F(3)_1$:= $F(3)_1$ / WURZEL(2) → $F(3)_1$ = -4/2 = 2	6, ERGEBNIS
71	12	**[Ende der Schleifenausführung vom 58/7]**	6, ERGEBNIS
72	13	**Return ((7.5, 0), (1.5, -2), (-0.5, 0), (1.5, 2))** [zurück zum 6-ten Schritt von fft(5,0), (9,0), (6,0), (4,0), (2,0), (-1,0), (2,0), (-3,0))]	6, ERGEBNIS
73	6	B = fft((9,0), (4,0), (-1,0), (-3,0)) Rekursiver Aufruf, wie vorher (Nr. 6 – 72) Ergebnis: B = ((4.5, 0), (5, -3.5), (3,5, 0), (5, 3.5))	ERGEBNIS
74	7-13	Schleifenausführung wie vorher (Nr. 58-71) Ergebnis: ((24, 0), (1.81, -5.66), (-0.35, -2.47), (0.31, -2.83), (2.12, 0), (0.31, 2.83), (-0.35,2.47), (1.81, 5.66))	